VI. Pappi Alexandrini *Propositiones duæ generales, quibus plura ex* Euclidis *Porismatis complexus est, Restitutæ a Viro Doctissimo* Rob. Simson, *Math. Prof.* Glasc. *Vid.* Pappi *præfationem ad Lib. 7. Coll. Math.* Apollonii *de Sectione rationis libris duobus a Clariss.* Hallejo *præmissam* pag. VIII. & XXXIV.

Ἐὰν ὑπτίȣ ἢ παρυπτίȣ ἢ παραλλήλȣ, &c.

Textus Pappi, qui in hac & sequente Propositione injuria temporis truncatus est, hoc modo Restituendus videtur.

" [SI duæ rectæ lineæ in duas rectas lineas sibi mu-
" tuo occurrentes vel inter se parallelas ducantur,]
" & dentur in una earum tria [a] puncta [vel duo, si re-
" cta in qua sunt, parallela fuerit alicui ex tribus re-
" liquis] : cætera vero puncta præter unum [b] tangant re-
" ctam positione datam, etiam hoc quoque tanget re-
" ctam positione datam." Hoc autem de quatuor tantum rectis dicitur, quarum non plures quam duæ per idem punctum transeunt. In quolibet vero proposito rectarum numero ignoratur, quamvis vera sit, hujusmodi Propositio. " Si quotcunque rectæ occurrant in-
" ter se, nec plures quam duæ per idem punctum; data
" vero sint puncta omnia in earum unâ, unumquodque autem

[a] *Tria puncta*] intersectionum sc. [b] *Tangant rectam*] i. e. unum punctum tangat unam aliquam rectam positione datam, & aliud tangat aliam positione datam, &c.

" autem punctum in aliâ tangat rectam positione da- " tam ; " vel generalius sic. Si quotcunque rectæ occurrant inter se, neque sint plures quam duæ per idem punctum, omnia vero puncta in earum unâ data sint ; reliquorum numerus erit numerus triangularis, cujus latus exhibet numerum punctorum rectam positione datam tangentium ; quarum intersectionum si nullæ tres existant ad angulos trianguli spatii, [nullæ quatuor ad angulos quadrilateri, nullæ quinque, &c. i. é. universim, si nullæ harum intersectionum in orbem redeant] unaquæque intersectio reliqua tanget positione datam. Propositio prima in decem dividitur casus, monente ipso Pappo, quorum ejus, in quo nullæ ex quatuor rectis sunt inter se parallelæ, neque rectæ positione datæ per data puncta transeunt, demonstrationem hic apponemus ; hic enim Casus inter omnes maximè est generalis, ejusque demonstratio secundæ propositionis demonstrationi omnino est necessaria. (*Fig*. 3. *&* 4.) Sint igitur quatuor rectæ A B, A D, B E, C E. Et data sint tria puncta intersectionum A, B, C in earum qualibet, reliquarum vero intersectionum D, E, F, una D tangat rectam G K positione datam, alia E tangat rectam H K positione datam ; tanget etiam reliqua F rectam positione datam. Ducatur per F recta M F parallela ad A B, quæ occurrat ipsis H K, K G, C E, in M, N, O. Quoniam igitur data est ratio H B ad B C dabitur eidem æqualis ratio M F ad F O, & quoniam datur ratio A C ad A G, dabitur eidem æqualis ratio F O ad F N ; quare datur ratio M F ad F N, igitur si jungatur F K, quæ occurrat ipsi A B in L, dabitur ratio H L ad L G ; & datur H G positione & magnitudine ; quare punctum L datur, & datum est punctum K, igitur K L positione datur.

Sit igitur H L ad L G in ratione composita ex rationibus H B ad B C & A C ad A G, & jungatur K L,

erit

erit hæc recta quam tangit punctum F, hoc est, si ducatur quævis C E, positione datis occurrens in D, E, & jungantur A D, B E sibi mutuo occurrentes in F; recta erit linea quæ per K, F, L transit. Nam per F ducatur M F parallela ipsi A B, & quoniam ratio M F ad F N composita est ex rationibus M F ad F O & F O ad F N, hoc est, ex rationibus H B ad B C & A C ad A G, ex quibus etiam componitur ratio H L ad L G; erit H L ad L G ut M F ad F N, & igitur H G ad M N, hoc est, H K ad M K ut H L ad M F: Quare recta est linea quæ per K, F, L transit, per 14. 1 aut 32. 6 Elem.

Explicatio Secundæ Propositionis.

Observandum hic est, Numerum intersectionum, quæ in una recta reperiuntur in quâcunque proposita multitudine rectarum, quarum non plures quam duæ per idem punctum transeunt, & quarum nullæ sunt inter se parallelæ, unitate minorem esse ipso numero rectarum: Nam duæ in unico puncto se invicem secant, tertia vero ducta priores in duobus, quarta priores in tribus punctis secat, &c. Et igitur numerus intersectionum in tribus rectis est unitas binario aucta, i. e. ternarius; numerus eorundem in quatuor rectis est ternarius ternario auctus; in quinque vero rectis est ultimus præcedens seu senarius quaternario auctus, &c. in infinitum; Qui numeri, ut manifestum est, triangulares sunt, quorum cujusque latus est numerus intersectionum, quæ inveniuntur in unâ qualibet recta, i. e. numerus qui unitate minor est numero omnium rectarum. Igitur si ex hoc numero omnium intersectionum dematur numerus omnium punctorum datorum, qui idem est cum numero intersectionum in una quâvis recta; reliquus erit adhuc triangularis, cujus latus ſc. unitate deficit a latere prioris, quod exhibet numerum omnium punctorum, & proinde binario minus eſt numero rectarum propoſitarum. Et hic eſt numerus interſectionum quas tangere rectam poſitione datam *Pappus* in hac Propoſitione requirit, quarumque ſi nullæ tres ſint ad angulos trianguli; [nullæ quatuor ad angulos [c] quadrilateri & ita deinceps;] unamquamque interſectionem reliquam tangere rectam poſitione datam affirmat. Quæ autem uncis incluſa ſunt, textui neceſſitate coacti adjecimus, nam ſine iis propoſitio vera non eſſet extra caſum quinque rectarum.

Commode vero in duos caſus dividitur propoſitio; quos etiam aperte ſatis indicat *Pappus*, qui Hypotheſin caſus facilioris propoſitioni hujus generis univerſaliſſimæ ſimul & elegantiſſimæ præmittit.

CASUS PRIMUS.

Si quotcunque rectæ occurrant inter ſe nec plures quam duæ per idem punctum; data vero ſint puncta omnia in earum unâ, unumquodcunque autem punctum in alia tangat rectam poſitione datam; unaquæque interſectio reliqua tanget rectam poſitione datam. Sint enim quotcunque rectæ, (*Fig.* 5.) *ex. gr.* ſex A F, B G, C H, D K, E L, E A; & data ſint omnia puncta in earum unâ, ſc. A, B, C, D, E; omnia vero puncta in aliâ ſc. F, L, M, N, tangant rectam poſitione datam: unaquæque reliqua interſectio tanget poſitione datam.

Sumatur enim quævis ex reliquis *ex. gr.* O, & quoniam quatuor ſunt rectæ O L, O N, A N, A B, & data ſunt tria puncta in unâ earum ſc. A, B, E, reliqua

 vero

[c] Intelliguntur etiam hic figuræ quarum latera ſe mutuo decuſſant Diagonalium inſtar, æque ac cæteræ.

vero præter unum O, viz. ipsa L, N tangunt rectam positione datam, tanget etiam O positione datam per *Prop.* I. Eodem modo idem de omnibus reliquis ostendetur.

CASUS SECUNDUS.

Cæteris manentibus jam non sint omnia puncta rectam positione datam tangentia (quorumque numerus binario minor est numero rectarum propositarum) in eâdem recta, sed nulla eorum in orbem redeant; ostendendum est reliqua omnia tangere rectam positione datam.

LEMMA I.

Si quotcunque rectæ inter se occurrant neque plures quam duæ per idem punctum, & sumantur quævis rectarum, sit vero numerus intersectionum, qui conficitur sumendo duo puncta in unaquâque rectarum sumptarum æqualis numero harum rectarum; puncta hæc in orbem redibunt. Nam quoniam sunt duo puncta in unaquâque recta, erunt ad minimum tria in duabus rectis, & quatuor in tribus & ita deinceps; semper sc. erit numerus punctorum ad minimum unitate major numero rectarum nisi recta ultima transeat per punctum primum; i. e. nisi rectæ in orbem redeant, in quo solo casu æqualis erit numerus punctorum numero rectarum.

LEMMA II.

Si quotcunque rectæ inter se occurrant neque plures quam duæ per idem punctum, sumantur vero quælibet ipsarum intersectiones, quarum numerus numero omnium um rectarum æqualis sit; vel hæ intersectiones omnes, vel earum aliquæ, in orbem redibunt, seu invenientur ad angulos polygoni vel trianguli.

Nam tres intersectiones trium rectarum sunt ad angulos trianguli; si vero sint quatuor rectæ, & sumantur quatuor puncta, una harum necessario invenietur in unâquaque recta; quod si in unâ aliqua ex quatuor rectis unum tantum inveniatur punctum, tria reliqua erunt in tribus reliquis rectis, & igitur ad angulos trianguli: Si vero nulla fuerit recta, in qua unum duntaxat punctum invenitur, erunt duo in unâquaque ex quatuor rectis, & sunt quatuor puncta, ergo per *Lem.* 1. sunt ad angulos quadrilateri. Et manifestum est si fuerint quatuor rectæ, & sumantur plura quam quatuor puncta, multo magis aliqua eorum in orbem redire.

Sint jam quinque rectæ, & sumantur quinque intersectionum puncta, &, si fuerit aliqua ex rectis in qua nullum invenitur punctum ex hisce quinque, erunt omnia quinque in quatuor reliquis rectis; Si vero fuerit aliqua recta in quâ unum duntaxat invenitur punctum, erunt reliqua quatuor puncta in reliquis quatuor rectis; igitur in utroque casu puncta aliqua erunt ad angulos trianguli, vel quadrilateri, per præcedentem casum: Si autem nulla fuerit recta in qua vel nullum vel unicum invenitur punctum, erunt duo in unâquaque ex quinque rectis, & sunt quinque puncta, ergo per *Lem.* 1. sunt ad angulos quinquelateri. Eodem prorsus ratiocinio ostendetur in sex rectis & ita in infinitum.

In *Fig.* 6. sunt octo rectæ, & octo sumuntur puncta, quorum quatuor in orbem redeunt.

Hisce præmissis propositio hoc modo demonstratur. Primo sint quinque rectæ (*Fig.* 7.) A D, A E, B F, C G, D H, & demptis punctis datis in una rectarum, viz. A, B, C, D,

 reliqua

reliqua erunt ſex puncta E, F, G, H, K, L, in quatuor rectis, & tria horum (nam latus numeri triangularis 6 eſt 3) quæ non ſunt ad angulos trianguli, a tribus ſc. rectarum propoſitarum contenti, *ex. gr.* E, F, G, tangant rectam poſitione datam; oſtendendum eſt reliqua tria K, H, L etiam tangere rectam poſitione datam.

Quoniam igitur ſunt quatuor rectæ A E, B F, C G, D F, & tria interſectionum puncta in ipſis ſumantur, viz. E, F, G; erit una aliqua harum rectarum in quâ neceſſario invenietur unum tantum ex hiſce tribus punctis; nam ſecus erit vel aliqua in qua nullum eſt punctum, & proinde erunt tria puncta in tribus reliquis rectis, i. e. ad angulos trianguli contra Hypotheſin; vel erunt ad minimum duo puncta in unâquaque quatuor rectarum, & igitur quatuor eſſent ad minimum puncta; ſed ſunt tantum tria; quare neceſſe eſt eſſe aliquam rectam in qua unum tantum invenitur punctum: Sit hæc recta A E, in qua ſc. eſt punctum E, ergo reliqua duo F, G, ſunt in reliquis tribus rectis B F, C G, D F; igitur, quoniam dantur tria puncta B, C, D, reliquum punctum L in iſtis tribus rectis, tangit rectam poſitione datam per primam Propoſitionem: Sumatur nunc G E, recta ſc. ex hiſce tribus quæ tranſit per punctum E in quartâ recta, & omnia puncta in hâc recta G E tangent poſitione datam. Quare, per caſum primum hujus propoſitionis, reliqua puncta K, H tangunt rectam poſitione datam.

Sint jam ſex rectæ (*Fig.* 8.) A E, A F, B G, C H, D K, E L; & demptis quinque datis punctis A, B, C, D, E, quæ ſunt in unâ rectarum, reliqua erunt decem puncta F, G, H, K, L, M, N, O, P, Q in quinque rectis; & ex Hypotheſi quatuor horum, quæ non in orbem redeunt, tangunt rectam poſitione datam; ſint hæ, F, G, H, K; & oſtendendum eſt reliqua ſex L, M, N, O, P, Q tangere rectam poſitione datam.

Quoniam igitur ſumuntur quatuor puncta interſectionum F, G, H, K, in quinque rectis A F, B G, C H, D K, E L; erit una aliqua recta in qua unum tantum ex hiſce punctis reperitur; nam ſecus erit vel aliqua in qua nullum eſt punctum, & proinde quatuor puncta erunt in quatuor reliquis rectis, & igitur aliqua eorum in orbem redibunt per *Lem.* 2. contra hypotheſin: vel erunt duo ad minimum puncta in unaquaque quinque rectarum, & ita eſſent quinque ad minimum puncta; ſed ſunt tantum quatuor, quare neceſſe eſt eſſe aliquam rectam in quâ unum tantum invenitur punctum; ſit hæc A F in quâ ſc. eſt punctum F; ergo reliqua tria G, H, K ſunt in reliquis quatuor rectis B G, C H, D K, E L, & dantur puncta B, C, D, E; ergo per primam partem hujus demonſtrationis reliqua tria puncta in his quatuor rectis, ſc. L, P, Q, tangunt rectam poſitione datam. Sumatur nunc B F, recta ſc. ex hiſce quatuor, quæ tranſit per punctum F in quinta recta; & omnia puncta in hac recta B F tangent rectam poſitione datam: Quare per Caſum primum hujus Propoſitionis reliqua puncta M, N, O tangunt rectam poſitione datam. Eodem prorſus modo demonſtrabitur Propoſitio in ſeptem, octo, &c. rectis in infinitum, ut patet.

Quod autem conditio uncis incluſa in hac propoſitione omnino ſit neceſſaria, patet in his duobus exemplis; idem vero univerſaliter præcedentium ope demonſtrari poteſt.

His adjecit Clariſſimus Profeſſor Poriſmata duo ſequentia primi Libri Poriſmatum Euclidis *a ſe quoque reſtituta.*

Poriſma primum, Lib. 1. Poriſmatum *Euclidis*, quod ſervavit *Pappus Alexandrinus* in præfatione ad *Lib.* 7. Math. Coll. *Vid. pag.* xxxv. *Ejuſd. Præf.*

Si a duobus punctis datis inflectantur duæ rectæ ad rectam poſitione datam, abſcindat autem earum una a recta positione data segmentum dato in eâ puncto adjacens, auferet etiam altera ab aliâ recta segmentum datam habens rationem.

Sint enim duo puncta data D, C, (*Fig.* 9.) a quibus ad positione datam A B inflectantur D B, C B; quarum una D B abscindat a positione data E F segmentum K M adjacens dato puncto M: Ostendendum est alteram C B auferre ab aliâ quadam recta segmentum datam habens rationem ad ipsum K M.

Juncta C D occurrat positione datis A B, E F in A, F punctis, quæ proinde data erunt. A puncto K, in quo inflexa B D occurrit ipsi E F, ducatur K H parallela ad A D, & occurrens alteri inflexæ B C in H, ipsi vero B A in N. Quoniam igitur dantur puncta A, D, C, dabitur ratio A D ad D C, & igitur ratio N K ad K H; quare si jungatur E H occurrens ipsi A D in G, dabitur ratio A F ad F G; sed datur A F, quare & F G datur, & punctum G; & datum est E, quare E G positione & magnitudine datur; & datur E F, quare ratio E F ad E G datur; & ducta M O per datum punctum M parallela ipsi A D, & occurrens E G in O, dabitur M O positione, & ideo punctum O; & propter parallelas M O, F G, K H est M K ad O H, ut E F ad E G, quæ sunt in data ratione. Igitur recta B C aufert a rectâ E G positione data, segmentum O H dato puncto O adjacens, in datâ ratione ad segmentum M K. *Q. E. D.*

Componetur vero ita, fiat A F ad F G ut A D ad D C, & juncta E G, per M ducatur M O parallela ad A D; ostendendum est, si a punctis D, C inflectantur ad A B quævis D B, C B abscindentes ex ipsis E F, E G, segmenta M K, O H punctis M, O adjacentia, fore ipsa in data ratione E F ad E G, seu, quod idem est, esse junctam H K parallelam ipsi A D; hoc vero videtur omissum fuisse ab *Euclide*, utpote quod tribus verbis

verbis indirecte demonstrari possit; *Pappus* autem in *Lem.* 1°. ad Porismata, duas directas ejusdem demonstrationes affert, quarum secundam, quæ paululum est corrupta apud *Commandinum*, hic subjungemus integritati suæ restitutam.

Vid. Pap. *Lib.* 7. *fol.* 239. *pag. prior.*

Per Compositam vero proportionem hoc pacto.

Quoniam est ut A F ad F G ita A D ad D C (*Vid. fig.* Papp. *fol.* 238. *pag. post. vel fig. nostr.* 9.) convertendo erit ut G F ad F A ita C D ad D A, & componendo, permutandoque & convertendo ut A D ad D F ita A C ad C G. Sed proportio A D ad D F composita est ex proportione A B ad B E, [& E K ad K F, & proportio A C ad C G composita est ex proportione A B ad B E] & proportione E H ad H G. Proportio igitur composita ex A B ad B E & E K ad K F eadem est, quæ componitur ex A B ad B E & E H ad H G. communis auferatur ratio A B ad B E, reliqua igitur E K ad K F eadem est quæ E H ad H G; quare H K ipsi A G parallela est.

Porisma Secundum. Quod punctum illud tangit rectam positione datam. Secundum Porisma videtur sequenti modo explicandum esse.

Si a duobus punctis datis C, G (*Fig.* 10.) ducantur duæ rectæ C B, G D occurrentes duabus rectis positione datis A B, E D, sitque recta D B puncta intersectionum jungens parallela ipsi C G, quæ per datum punctum ducitur, intersectio K ductarum tanget rectam positione datam.

Occurrant enim positione datæ sibi mutuo in H, & juncta K H occurrat C G in F & B D in M. Igitur propter parallelas est A E ad E F (ut B D ad D M hoc est) ut C G ad G F; & igitur A E ad C G ut E F ad G F, datur itaque ratio E F ad G F, & datur E G, quare pun-

punctum F, & datur punctum H, quare H F positione. Sit itaque ut A E ad E F ita C G ad G F, & juncta H F erit recta quam tangit punctum K; hoc est ducta quævis G D, occurrens ipsi F M in K, erit recta linea quæ per C K B transit, nam est D B ad D M ut A C ad E F, hoc est ex constructione ut C G ad G F, quare D B ad C G ut (D M ad G F hoc est ut) D K ad K G, & igitur est C K B recta linea.

Pappus idem aliter demonstrat in 2do *Lemmate*, quod hoc modo debet legi: sc. Ducatur per G, (*Vid. Fig.* Pap. *fol.* 239. *pag. post. vel Fig. nostr.* 10.) recta linea G L parallela D E, & juncta H K ad L producatur. Quoniam igitur est ut A E ad E F ita C G ad G F, & permutando [A E ad C G ut E F ad G F]; ut autem A E ad C G ita est E H ad G L, [d] quod duæ duabus sunt parallelæ. Ut igitur E F ad F G ita E H ad G L, atque est E H parallela ipsi G L, ergo recta linea est quæ per H K L F transit.

---

[d] *Quod duæ duabus sunt parallelæ*, sc. A E ad D B, & G L ad D E, unde est A E ad D B ut E H ad D H, & est D B ad C G (ut D K ad K G, i. e.) ut D H ad L G; ergo per 22. 5. est A E ad C G ut E H ad G L.

VII. *De*

Calculus Renis sinistri

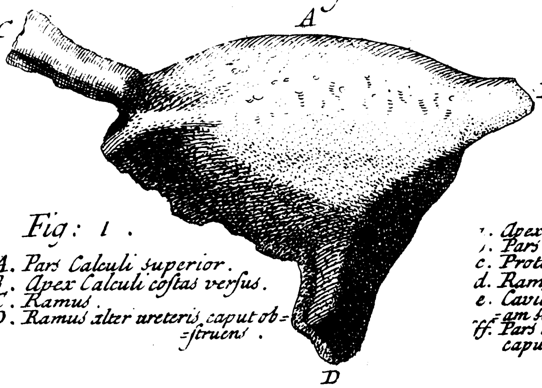

Fig: 1.

A. Pars Calculi superior.
B. Apex Calculi costas versus.
C. Ramus.
D. Ramus alter ureteris caput obstruens.

Calculus Renis dextri

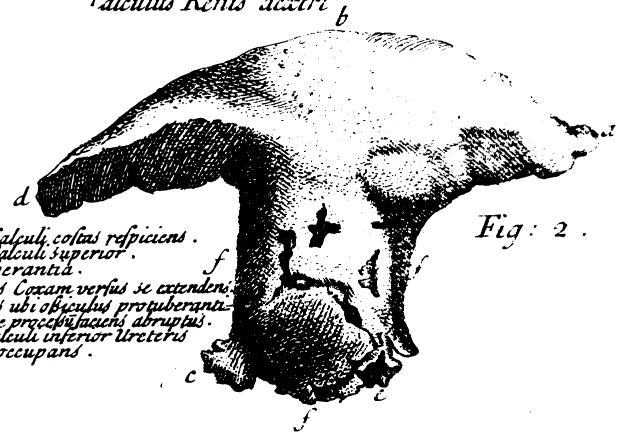

Fig: 2.

a. Apex Calculi costas respiciens.
b. Pars Calculi superior.
c. Protuberantia.
d. Ramus Coxam versus se extendens.
e. Cavitas ubi ossiculus protuberantiam sive processus faciens abruptus.
ff. Pars Calculi inferior Ureteris caput occupans.

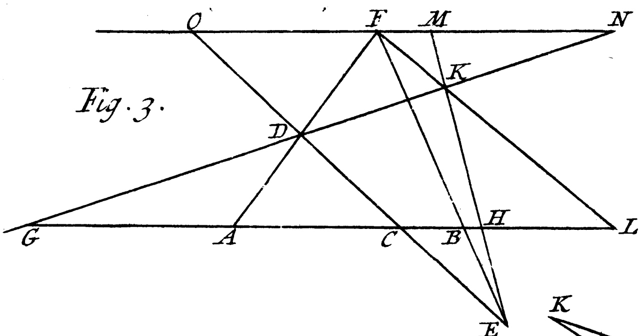

Fig. 3.

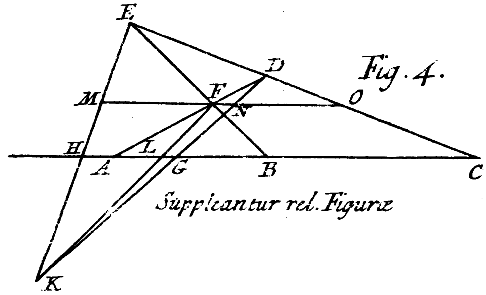

Fig. 4.

Suppleantur rel. Figuræ

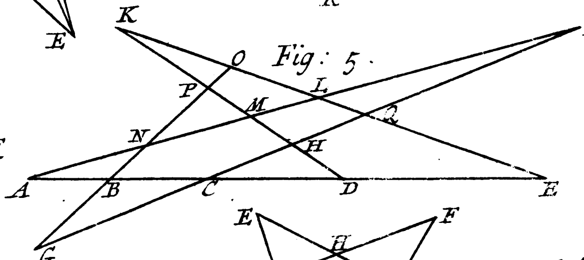

Fig: 5.

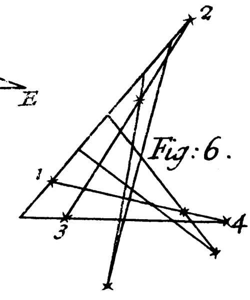

Fig: 6.

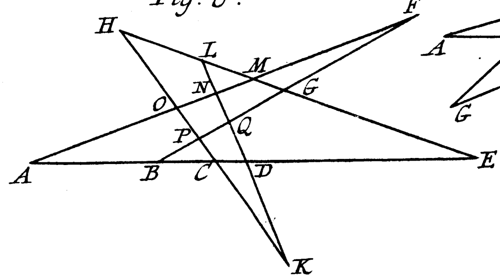

Fig: 8.

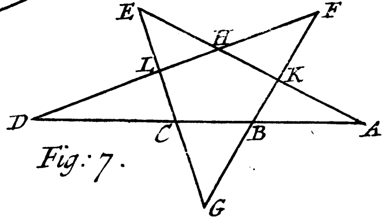

Fig: 7.

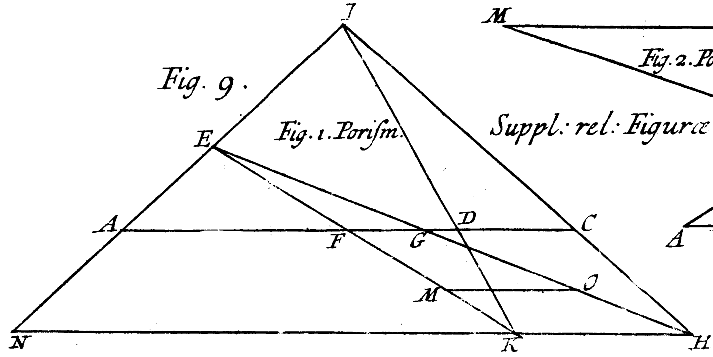

Fig. 9.

Fig. 1. Porism.

Suppl: rel: Figuræ

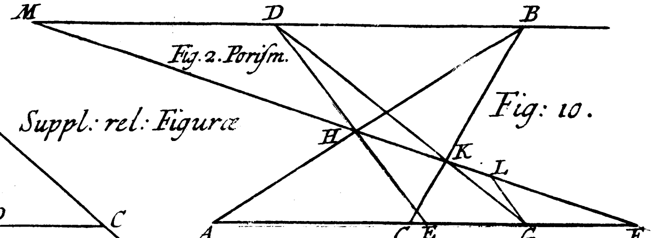

Fig. 2. Porism.

Fig: 10.

Fig. 11.